Première semaine.

Probabilité (1)

- *a) Espaces probabilisés*

Tribu sur un ensemble Ω. On se borne à la définition et à la stabilité par les opérations ensemblistes finies ou dénombrables.
Événements. Généralisation du vocabulaire relatif aux événements introduit en première année.
Espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$.
Si $\mathcal{A}$ est une tribu sur Ω, une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ est une application P définie sur $\mathcal{A}$, à valeurs dans $[0,1]$, telle que $P(\Omega) = 1$ et, pour toute suite $(A_n)_{n\geqslant 0}$ d'événements deux à deux disjoints, on ait :

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$

Espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Si Ω est fini ou dénombrable et si $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, une probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{A})$ s'identifie, via la formule

$$P(\{\omega\}) = p_\omega,$$

à une famille $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ de réels positifs sommable de somme 1.

- *b) Propriétés élémentaires des probabilités*

Continuité croissante : si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite d'événements croissante pour l'inclusion, alors :

$$P(A_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right).$$

Continuité décroissante : si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite d'événements décroissante pour l'inclusion, alors :

$$P(A_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right).$$

Si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite d'événements, alors :

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$

Événements négligeables, événements presque sûrs. Une réunion finie ou dénombrable d'événements négligeables est négligeable.Propriétés presque sûres.
Tout développement sur ces notions est hors programme.

- *c) Probabilités conditionnelles et indépendance*

Extension des résultats vus en première année dans le cadre des univers finis : probabilité conditionnelle, formule des probabilités composées, formule des probabilités totales, formules de Bayes.Notations $P_B(A), P(A|B)$.
Couple d'événements indépendants. Famille quelconque d'événements mutuellement indépendants.

- *d) Variables aléatoires discrètes*

Étant donnés un ensemble E et un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, une variable aléatoire discrète définie sur Ω est une application X de Ω dans E telle que $X(\Omega)$ soit fini ou dénombrable et que, pour tout x de $X(\Omega)$, $X^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{A}$. Lorsque $E \subset \mathbb{R}$, la variable aléatoire est dite réelle.
Loi P_X de la variable aléatoire X.Notations $X \sim Y, X \sim \mathcal{L}$.
Notations $(X \geqslant x), (X \leqslant x), (X < x), (X > x)$ pour une variable aléatoire réelle X.

- *e) Couples de variables aléatoires, variables aléatoires indépendantes*

Couple de variables aléatoires. Loi conjointe, lois marginales.
Loi conditionnelle de Y sachant $X = x$. Extension au conditionnement par $X > x$ ou autres inégalités.
Extension aux n-uplets de variables aléatoires. Vecteurs aléatoires discrets.
Couple de variables aléatoires indépendantes.Extension des résultats vus en première année.

Famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes. Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes, alors pour tout m compris entre 1 et $n-1$, et toutes fonctions f et g, les variables $f(X_1, \ldots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \ldots, X_n)$ sont indépendantes.Démonstration non exigible.
Existence d'espaces probabilisés portant une suite de variables indépendantes de lois discrètes données. La démonstration est hors programme.
Modélisation du jeu de pile ou face infini : suite d'épreuves de Bernoulli mutuellement indépendantes.
- *g) Espérance*
Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, l'espérance de X est la somme, dans $[0, +\infty]$, de la famille $(P\,(X=x)\;\;x)_{x \in X(\Omega)}$.
Notation $\mathrm{E}(X)$.
Si X est une variable aléatoire réelle, la variable aléatoire X est dite d'espérance finie si la famille $(x\;P\,(X=x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable ; dans ce cas, la somme de cette famille est l'espérance de X. Notation $\mathrm{E}(X)$.
Variables centrées.
Espérance d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique, d'une variable aléatoire suivant une loi de Poisson.
Linéarité, positivité et croissance de l'espérance sur l'espace des variables aléatoires d'espérance finie définies sur Ω. Si $|X| \leqslant Y$ et si Y est d'espérance finie, alors X est d'espérance finie.
Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes d'espérances finies, alors :

$$\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\;\mathrm{E}(Y).$$

Formule de transfert : soit X une variable aléatoire discrète, f une fonction définie sur $X(\Omega)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$; alors $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la famille $(P\,(X=x)\;\;f(x))$ est sommable ; si tel est le cas :

$$\mathrm{E}\,(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)\;P(X=x).$$

Démonstration non exigible.

Deuxième semaine.

Tout le programme précédent +
- *f) Lois usuelles*
Pour p dans $]0,1[$, loi géométrique de paramètre p. Notation $\mathcal{G}(p)$.
La variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{G}(p)$ si

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X=k) = (1-p)^{k-1}p.$$

Interprétation comme rang du premier succès dans une suite d'épreuves de Bernoulli mutuellement indépendantes de paramètre p.
Caractérisation comme loi sans mémoire :

$$P(X > n+k \mid X > n) = P(X > k).$$

Pour λ dans $\mathbb{R}_+^*$, loi de Poisson de paramètre λ.Notation $\mathcal{P}(\lambda)$.
Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson : si, pour tout n, $X_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$ et si (np_n) converge vers λ, alors :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P\,(X_n = k) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

Interprétation de la loi de Poisson comme loi des événements rares.
Inégalité de Markov.
- *h) Variance, écart type et covariance*
Moments.
Si une variable aléatoire admet un moment d'ordre 2, elle est d'espérance finie.
Inégalité de Cauchy-Schwarz : si X et Y admettent chacune un moment d'ordre 2, alors XY est d'espérance finie et $\mathrm{E}(XY)^2 \leqslant \mathrm{E}(X^2)\;\mathrm{E}(Y^2)$.
Espace des variables aléatoires définies sur Ω admettant un moment d'ordre 2.
Variance, écart type. Notations $\mathrm{V}(X), \sigma(X)$.
Variables réduites.
Relation $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2$.
Relation $\mathrm{V}(aX+b) = a^2\mathrm{V}(X)$. Si $\sigma(X) > 0$, la variable aléatoire $\dfrac{X - \mathrm{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.
Variance d'une variable aléatoire géométrique, d'une variable aléatoire de Poisson.

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
Covariance de deux variables aléatoires.
Relation $\text{Cov}(X,Y) = \text{E}(XY) - \text{E}(X)\text{E}(Y)$. Cas de variables indépendantes.
Variance d'une somme finie, cas de variables deux à deux indépendantes.
- *i) Loi faible des grands nombres*
Si $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes, de même loi et admettant un moment d'ordre 2, alors, si $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et $m = \text{E}(X_1)$, on a,

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Les étudiants doivent savoir retrouver, pour $\varepsilon > 0$, l'inégalité :

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

où σ est la variance commune des X_k.
- *j) Fonctions génératrices*
Fonction génératrice de la variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$:

$$G_X(t) = \text{E}(t^X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k)\, t^k.$$

La série entière définissant G_X est de rayon supérieur ou égal à 1 et converge normalement sur le disque fermé de centre 0 et de rayon 1. Continuité de G_X.
Détermination de la loi de X par G_X. Utilisation de G_X pour calculer les moments de X.
La variable aléatoire X est d'espérance finie si et seulement si G_X est dérivable en 1 ; dans ce cas $\text{E}(X) = {G_X}'(1)$. La variable aléatoire X admet un second moment si et seulement si G_X est deux fois dérivable en 1. Les étudiants doivent savoir retrouver l'expression de la variance de X à l'aide de ${G_X}'(1)$ et ${G_X}''(1)$.
Les étudiants doivent savoir calculer la fonction génératrice d'une variable aléatoire de Bernoulli, binomiale, géométrique, de Poisson.
Fonction génératrice d'une somme finie de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Prévision : Calcul différentiel