MP1 2016-2017 *Quinzaine n° 10 du 20 au 31 Mars*

Première semaine.

- *Endomorphismes symétriques d'un espace euclidien*
Endomorphisme symétrique d'un espace euclidien. Lien avec les matrices symétriques réelles.
La notion d'adjoint d'un endomorphisme est hors programme.
Caractérisation des projecteurs orthogonaux comme projecteurs symétriques.
Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable.
Théorème spectral : si u est un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E, alors E est somme directe orthogonale des sous-espaces propres de u ; de manière équivalente, il existe une base orthonormale diagonalisant u. Interprétation matricielle de ce résultat.
La notion d'endomorphisme symétrique positif (ou défini positif) est hors programme.
- *Isométries vectorielles d'un espace euclidien*
Isométrie vectorielle d'un espace euclidien.Autre dénomination : automorphisme orthogonal.
Lien avec les matrices orthogonales.
Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable.
Réduction d'une isométrie vectorielle en base orthonormale. Interprétation dans le registre matriciel.
Cas particulier : réduction d'une isométrie vectorielle directe d'un espace euclidien de dimension 3. La forme réduite justifie la terminologie « rotation ».

Deuxième semaine.

Calcul différentiel
Les fonctions considérées dans ce chapitre sont définies sur un ouvert d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie et à valeurs dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie.
Le choix d'une base de l'espace d'arrivée permet de se ramener au cas des fonctions à valeurs réelles.
- *a) Dérivée selon un vecteur, dérivées partielles*
Dérivée de l'application f au point a selon le vecteur v.Notations $\mathrm{D}_v f(a)$, $\mathrm{D}_v f$.
Dérivées partielles dans une base. Notations $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, $\partial_i f(a)$.
Lorsqu'une base de E est fixée, l'identification entre $f(x)$ et $f(x_1, \ldots, x_n)$ est autorisée.
- *b) Différentielle*
Application différentiable au point a. Notation $o(h)$. Développement limité à l'ordre 1.
Si f est différentiable en a, alors f est continue en a et dérivable en a selon tout vecteur.
Différentielle de f en a, encore appelée application linéaire tangente à f en a.
Relation $\underset{\cdot}{\mathrm{f}}(a) \cdot v = \mathrm{D}_v f(a)$. Notations $\underset{\cdot}{\mathrm{f}}(a)$, $\underset{\cdot}{\mathrm{f}}(a) \cdot v$.
Application différentiable sur un ouvert Ω. Différentielle sur Ω. Notation $\underset{\cdot}{\mathrm{f}}$.
Cas particuliers : application constante, restriction à un ouvert d'une application linéaire. Lien entre différentielle et dérivées partielles.
Matrice de $\underset{\cdot}{\mathrm{f}}(a)$ dans un couple de bases. Matrice jacobienne d'une application définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$.
Cas des fonctions d'une variable : si Ω est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, la différentiabilité de f en a équivaut à la dérivabilité de f en a ; relation $f'(a) = \underset{\cdot}{\mathrm{f}}(a) \cdot 1$.
- *c) Opérations sur les applications différentiables*
Différentielle d'une combinaison linéaire d'applications différentiables, de $B(f, g)$ où B est bilinéaire et f et g sont deux applications différentiables. On utilise l'existence d'un réel positif C tel que, pour tout (u, v), on ait $\|B(u, v)\| \leqslant C\|u\| \, \|v\|$.
Tout développement sur les applications bilinéaires continues est hors programme.
Différentielle d'une composée d'applications différentiables.
Dérivée le long d'un arc : si γ est une application définie sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$, dérivable en t, si f est différentiable en $\gamma(t)$, alors $(f \circ \gamma)'(t) = \underset{\cdot}{\mathrm{f}}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$. Interprétation géométrique en termes de tangentes.
Cas particulier fondamental : $\gamma(t) = x + th$.
Dérivation de $t \mapsto f(x_1(t), \ldots, x_n(t))$.
Dérivées partielles d'une composée d'applications différentiables. Règle de la chaîne : calcul des dérivées partielles de $(u_1, \ldots, u_m) \mapsto f(x_1(u_1, \ldots, u_m), \ldots, x_n(u_1, \ldots, u_m))$.
- *d) Cas des applications numériques*

Si l'espace E est euclidien, gradient en a d'une application numérique différentiable en a. Expression du gradient en base orthonormée. Le théorème de représentation des formes linéaires dans un espace euclidien est établi à ce stade.
Notation $\nabla f(a)$.
Interprétation géométrique du gradient : si $\nabla f(a) \neq 0$, il est colinéaire et de même sens que le vecteur unitaire selon lequel la dérivée de f en a est maximale.
Point critique d'une application différentiable.
Condition nécessaire d'existence d'un extremum local.
Exemples de recherche d'extremums globaux.
- *e) Vecteurs tangents à une partie d'un espace normé de dimension finie*
Si X est une partie de E et x un point de X, un vecteur v de E est tangent à X en x s'il existe $\varepsilon > 0$ et un arc γ défini sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$ dérivable en 0 à valeurs dans X, tels que $\gamma(0) = x, \gamma'(0) = v$.
Cas où $E = \mathbb{R}^3$ et où X est le graphe d'une fonction f différentiable sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Plan affine tangent à une surface d'équation $z = f(x, y)$: équation cartésienne.
Si f est une fonction à valeurs réelles définie et différentiable sur un ouvert de l'espace euclidien E, si X est une ligne de niveau de f, alors les vecteurs tangents à X au point x de X sont orthogonaux au gradient de f en x.Le théorème des fonctions implicites est hors programme.
- *f) Applications de classe $\mathcal{C}^1$*
Une application f est dite de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert Ω si elle est différentiable sur Ω et si f̣ est continue sur Ω.
L'application f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω si et seulement si les dérivées partielles relativement à une base de E existent en tout point de Ω et sont continues sur Ω. Démonstration non exigible.
Opérations algébriques sur les applications de classe $\mathcal{C}^1$.
Si f est une application de classe $\mathcal{C}^1$ de Ω dans F, si γ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0, 1]$ dans Ω, si $\gamma(0) = a, \gamma(1) = b$, alors :

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 \text{f̣}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\text{ṭ}.$$

circulation d'un champ de vecteurs dérivant d'un potentiel.
Si Ω est connexe par arcs, caractérisation des fonctions constantes sur Ω. Démonstration pour Ω convexe.
- *g) Applications de classe $\mathcal{C}^k$*
Dérivées partielles d'ordre k. Notations $\dfrac{\partial^k f}{\partial x_{j_l} \dots \partial x_{j_1}}$, $\partial_{j_l} \dots \partial_{j_1} f$. Une application est dite de classe $\mathcal{C}^k$ sur un ouvert Ω si ses dérivées partielles d'ordre k existent et sont continues sur Ω. La notion de différentielle seconde est hors programme.
Théorème de Schwarz.Démonstration non exigible.
Opérations algébriques sur les applications de classe $\mathcal{C}^k$. Composition d'applications de classe $\mathcal{C}^k$.Démonstrations non exigibles. Exemples d'équations aux dérivées partielles du premier et du second ordre. Les étudiants doivent être capables d'utiliser un changement de variables dans les deux cas suivants : transformation affine, passage en coordonnées polaires.
L'utilisation de tout autre changement de variables suppose une indication.
La notion de difféomorphisme étant hors programme, l'expression des solutions en fonction des variables initiales n'est pas un attendu.
- *g) Arcs paramétrés*
Arc paramétré de classe $\mathcal{C}^1$ à valeurs dans E. Paramètre régulier.Interprétation géométrique de la dérivée : tangente en un point associé à un paramètre régulier.
Exemples simples d'arcs paramétrés plans.Les étudiants doivent savoir déterminer la tangente et la normale à un arc paramétré plan en un point associé à un paramètre régulier.
L'étude des points stationnaires, des courbes asymptotes et des arcs définis par une équation polaire est hors programme.
La pratique du tracé des arcs paramétrés n'est pas un objectif du programme.

Arrêt des colles avant les écrits.