Première semaine.

$\mathbb{R}$, dénombrabilité, suites réelles

• Présentation de $\mathbb{R}$: $\mathbb{R}$ est un corps commutatif totalement ordonné possédant la propriété de la borne supérieure. Rappels sur les différentes structures algébriques. Parties denses, discrètes.
Ensembles dénombrables. Un ensemble est dit dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$. Les parties infinies de $\mathbb{N}$ sont dénombrables. Un ensemble est fini ou dénombrable si et seulement s'il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$.
Un produit cartésien fini d'ensembles dénombrables est dénombrable. Une réunion finie ou dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables est finie ou dénombrable.
Les ensembles $\mathbb{N}^2$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables. L'ensemble $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.
• Suites : révision générale (y compris valeur d'adhérence). Notamment : suites adjacentes, Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$, approximation de point fixe. Le théorème de point fixe, la notion de suite de Cauchy sont HP mais connus.
Récurrences homographiques. Récurrence linéaire à coefficients constants.
Relations de comparaison entre suites : domination, négligeabilité et équivalence.

Deuxième semaine.

Séries numériques (1)
Sommes partielles. Convergence, divergence. La série de terme général u_n est notée $\sum u_n$. Somme et restes d'une série convergente. En cas de convergence, notation $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
Linéarité de la somme. Le terme général d'une série convergente tend vers 0. Divergence grossière.
Lien suite-série. La suite (u_n) et la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ ont même nature.
Série absolument convergente. Une série absolument convergente d'éléments d'un espace vectoriel normé de dimension finie est convergente. Le critère de Cauchy est hors programme.
Règle de d'Alembert.
Critère des séries alternées. Signe et encadrement des restes.
Comparaison série-intégrale :
Si f est une fonction continue par morceaux et décroissante de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$, alors la série de terme général $\displaystyle\int_{n-1}^{n} f(t)\d{t} - f(n)$ converge.
Les étudiants doivent savoir utiliser la comparaison série-intégrale pour estimer des sommes partielles de séries divergentes ou des restes de séries convergentes dans le cas où f est monotone.
Interprétation géométrique.

Prévision : séries numériques (2) familles sommables