Première semaine.

Série entière
- a) *Généralités*
Série entière.
Lemme d'Abel : si la suite $(a_n z_0^n)$ est bornée alors, pour tout nombre complexe z tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.
Rayon de convergence d'une série entière.Disque ouvert de convergence ; intervalle ouvert de convergence. La convergence est normale sur tout disque fermé de centre 0 et de rayon strictement inférieur à R ; la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement pour tout z tel que $|z| > R$. Si $a_n = O(b_n)$, $R_a \geqslant R_b$. Si $a_n \sim b_n$, $R_a = R_b$.
Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon de convergence. Utilisation de la règle de d'Alembert.
Continuité de la somme d'une série entière sur le disque ouvert de convergence. L'étude des propriétés de la somme au bord du disque ouvert de convergence n'est pas un objectif du programme.
Somme et produit de Cauchy de deux séries entières.
- b) *Série entière d'une variable réelle* Primitivation d'une série entière sur l'intervalle ouvert de convergence.
La somme d'une série entière est de classe C^∞ sur l'intervalle ouvert de convergence et ses dérivées s'obtiennent par dérivation terme à terme.
Expression des coefficients d'une série entière de rayon de convergence strictement positif à l'aide des dérivées en 0 de sa somme. Si les fonctions $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ coïncident sur un voisinage de 0, alors pour tout n, $a_n = b_n$.
- c) *Fonctions développables en série entière, développements usuels*
Développement de $\exp(z)$ sur $\mathbb{C}$.
Développement de $\dfrac{1}{1-z}$ sur $\{z \in \mathbb{C},\ |z| < 1\}$. Fonction développable en série entière sur un intervalle $]-r, r[$ de $\mathbb{R}$. Série de Taylor d'une fonction de classe C^∞ sur un intervalle $]-r, r[$. Développements de fonctions de variable réelle.
Les étudiants doivent connaître les développements en série entière des fonctions exponentielle, hyperboliques, circulaires, Arctan, $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto (1+x)^\alpha$.
Les étudiants doivent savoir développer une fonction en série entière à l'aide d'une équation différentielle linéaire. (en liaison avec le programme de colle suivant).

Deuxième semaine.

Équations différentielles linéaires
I est un intervalle de $\mathbb{R}$, E un espace normé de dimension finie.
- a) *Généralités*
Équation différentielle linéaire :

$$x' = a(t)(x) + b(t)$$

où a est une application continue de I dans $\mathcal{L}(E)$ et b une application continue de I dans E.
Forme matricielle : systèmes différentiels linéaires $X' = A'(t)X + B(t)$.
Équation différentielle homogène associée à une équation différentielle linéaire.
Principe de superposition.
Problème de Cauchy.Mise sous forme intégrale d'un problème de Cauchy.
Représentation d'une équation scalaire linéaire d'ordre n par un système différentiel linéaire.
Problème de Cauchy pour une équation linéaire scalaire d'ordre n.
- b) *Solutions d'une équation différentielle linéaire*
Théorème de Cauchy linéaire : existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy. Démonstration non exigible.
En relation avec I : méthode d'Euler pour la recherche d'une solution approchée.
Cas des équations scalaires d'ordre n.
Cas des équations homogènes : l'ensemble des solutions est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, E)$. Pour t_0 dans I, l'application $x \mapsto x(t_0)$ est un isomorphisme de cet espace sur E. Dimension de l'espace des solutions. Cas des équations scalaires homogènes d'ordre n.

Structure de l'ensemble des solutions d'une équation avec second membre.
Exemples d'équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1 ou 2 non résolues :
$a(x)y' + b(x)y = c(x), \quad a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x)$. Les étudiants doivent savoir exploiter la recherche de solutions développables en série entière.
- *c) Exponentielle d'un endomorphisme, d'une matrice*
Exponentielle d'un endomorphisme d'un espace normé de dimension finie, d'une matrice réelle ou complexe.
En relation avec I : calcul de l'exponentielle d'une matrice.
Continuité de l'exponentielle.
Exponentielle de la somme de deux endomorphismes qui commutent.Démonstration non exigible.
Dérivation, si a est un endomorphisme d'un espace normé de dimension finie, de l'application $t \mapsto \exp(ta)$.Dérivation de $t \mapsto \exp(tA)$ si A est une matrice carrée réelle ou complexe.
- *d) Systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants*
Résolution du problème de Cauchy

$$x' = a\,(x)\,, \quad x(t_0) = x_0$$

si a est un endomorphisme de E et x_0 un élément de E. Traduction matricielle.
Pour les calculs explicites, on se borne aux deux cas suivants : A diagonalisable ou $n \leqslant 3$.
- *e) Méthode de variation des constantes*
Méthode de variation des constantes pour les systèmes différentiels linéaires à coefficients continus. Dans les exercices pratiques, on se limite au cas $n = 2$. Cas particulier des systèmes différentiels à coefficients constants.Dans les exercices pratiques, on se limite au cas $n = 2$.
- *f) Équations différentielles scalaires du second ordre*
Adaptation de la méthode de variation des constantes aux équations scalaires du second ordre.
Wronskien de deux solutions d'une équation scalaire homogène d'ordre 2.Définition et calcul. Cas d'une équation $x'' + q(t)x = 0$.

Prévision : Pas de Colle la semaine de la rentrée : concours blanc