MP 2023-2024 *Semaine n° 8bis du 12 au 16 février*

Équations différentielles linéaires

I est un intervalle de $\mathbb{R}$, E un espace normé de dimension finie.

- *a) Généralités*

Équation différentielle linéaire :

$$x' = a(t)(x) + b(t)$$

où a est une application continue de I dans $\mathcal{L}(E)$ et b une application continue de I dans E.
Forme matricielle : systèmes différentiels linéaires $X' = A'(t)X + B(t)$.
Équation différentielle homogène associée à une équation différentielle linéaire.
Principe de superposition.
Problème de Cauchy.Mise sous forme intégrale d'un problème de Cauchy.
Représentation d'une équation scalaire linéaire d'ordre n par un système différentiel linéaire.
Problème de Cauchy pour une équation linéaire scalaire d'ordre n.

- *b) Solutions d'une équation différentielle linéaire*

Théorème de Cauchy linéaire : existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.Démonstration non exigible.
En relation avec I : méthode d'Euler pour la recherche d'une solution approchée.
Cas des équations scalaires d'ordre n.
Cas des équations homogènes : l'ensemble des solutions est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, E)$. Pour t_0 dans I, l'application $x \mapsto x(t_0)$ est un isomorphisme de cet espace sur E. Dimension de l'espace des solutions. Cas des équations scalaires homogènes d'ordre n.
Structure de l'ensemble des solutions d'une équation avec second membre.
Exemples d'équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1 ou 2 non résolues :
$a(x)y' + b(x)y = c(x), \quad a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x)$. Les étudiants doivent savoir exploiter la recherche de solutions développables en série entière.

- *d) Systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants*

Résolution du problème de Cauchy

$$x' = a\,(x)\,, \quad x(t_0) = x_0$$

si a est un endomorphisme de E et x_0 un élément de E. Traduction matricielle.
Pour les calculs explicites, on se borne aux deux cas suivants : A diagonalisable ou $n \leqslant 3$.

- *e) Méthode de variation des constantes*

Méthode de variation des constantes pour les systèmes différentiels linéaires à coefficients continus. Dans les exercices pratiques, on se limite au cas $n = 2$. Cas particulier des systèmes différentiels à coefficients constants.Dans les exercices pratiques, on se limite au cas $n = 2$.

- *f) Équations différentielles scalaires du second ordre*

Adaptation de la méthode de variation des constantes aux équations scalaires du second ordre.
Wronskien de deux solutions d'une équation scalaire homogène d'ordre 2.Définition et calcul. Cas d'une équation $x'' + q(t)x = 0$.

- *c) Exponentielle d'un endomorphisme, d'une matrice*

Exponentielle d'un endomorphisme d'un espace normé de dimension finie, d'une matrice réelle ou complexe.
En relation avec I : calcul de l'exponentielle d'une matrice.
Continuité de l'exponentielle.
Exponentielle de la somme de deux endomorphismes qui commutent.Démonstration non exigible.
Dérivation, si a est un endomorphisme d'un espace normé de dimension finie, de l'application $t \mapsto \exp(ta)$.Dérivation de $t \mapsto \exp(tA)$ si A est une matrice carrée réelle ou complexe.

- *d) Systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants*

Résolution du problème de Cauchy

$$x' = a\,(x)\,, \quad x(t_0) = x_0$$

si a est un endomorphisme de E et x_0 un élément de E. Traduction matricielle.
Pour les calculs explicites, on se borne aux deux cas suivants : A diagonalisable ou $n \leqslant 3$.

- *e) Méthode de variation des constantes*

Méthode de variation des constantes pour les systèmes différentiels linéaires à coefficients continus. Dans les exercices pratiques, on se limite au cas $n = 2$. Cas particulier des systèmes différentiels à coefficients constants.Dans les exercices pratiques, on se limite au cas $n = 2$.

- *f) Équations différentielles scalaires du second ordre*

Adaptation de la méthode de variation des constantes aux équations scalaires du second ordre.
Wronskien de deux solutions d'une équation scalaire homogène d'ordre 2.Définition et calcul. Cas d'une équation $x'' + q(t)x = 0$.

Pas d'interrogation la semaine du 19 au 23 février : concours blanc

Prévision : espaces préhilbertien / euclidiens