Première semaine.

Intégration sur un intervalle quelconque

Les fonctions sont à valeurs dans $\mathbb{K}$, corps des réels ou des complexes.

- a) Intégrale généralisée sur un intervalle de la forme $[a,+\infty[$

Pour f continue par morceaux de $[a,+\infty[$ dans $\mathbb{K}$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ est dite convergente si la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f$ a une limite finie en $+\infty$. Si tel est le cas, on note $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ cette limite. Notations $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$, $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$.

Linéarité de l'intégrale sur $[a,+\infty[$, positivité. Dérivation de $x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} f$ si f est continue.

- b) Intégrabilité sur un intervalle de la forme $[a,+\infty[$

Une fonction f est dite intégrable sur $[a,+\infty[$ si $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f|$ converge. On utilise indifféremment les expressions « f est intégrable sur $[a,+\infty[$ », et « l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge absolument ».

Si f est intégrable sur $[a,+\infty[$, alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge. L'étude des intégrales semi-convergentes n'est pas un objectif du programme.

- c) Intégration des fonctions positives sur un intervalle de la forme $[a,+\infty[$

Si f est positive sur $[a,+\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge si et seulement si $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f$ est majorée.

Pour α dans $\mathbb{R}$, étude de l'intégrabilité de $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ sur $[1,+\infty[$.

Pour f et g deux fonctions réelles positives continues par morceaux sur $[a,+\infty[$:

– si $0 \leqslant f \leqslant g$, l'intégrabilité de g sur $[a,+\infty[$ implique celle de f ;

– si $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} O(g(x))$, l'intégrabilité de g sur $[a,+\infty[$ implique celle de f ;

– si $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)$, l'intégrabilité de g sur $[a,+\infty[$ équivaut à celle de f.

- d) Intégration sur un intervalle quelconque

Adaptation des paragraphes précédents aux fonctions définies sur un intervalle semi-ouvert de $\mathbb{R}$.Notations $\displaystyle\int_a^b f$, $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$.

On utilise indifféremment les expressions « f est intégrable sur $[a,b[$ », et « l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ converge absolument ».

Pour α dans $\mathbb{R}$, étude de l'intégrabilité de $x \mapsto \frac{1}{(x-a)^\alpha}$ sur $]a,b]$, de l'intégrabilité de $x \mapsto \frac{1}{|x-a|^\alpha}$ sur $[b,a[$.

Adaptation des paragraphes précédents aux fonctions définies sur un intervalle ouvert $]a,b[$ de $\mathbb{R}$, $(a,b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$. Notations $\displaystyle\int_a^b f$, $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$.

Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, linéarité et positivité de l'application $f \mapsto \displaystyle\int_I f$ sur l'espace des fonctions de I dans $\mathbb{K}$ dont l'intégrale converge.

Relation de Chasles. Notation $\displaystyle\int_I f$.

Espace des fonctions intégrables de I dans E.

Inégalité triangulaire.

Si f est continue et intégrable sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et si $\displaystyle\int_I f = 0$, alors f est identiquement nulle.

- e) intégrale curviligne ou ce qu'il en reste...

Si f est une application de classe $\mathcal{C}^1$ d'un ouvert Ω dans E, si γ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0,1]$ dans Ω, si $\gamma(0) = a, \gamma(1) = b$, alors :

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt.$$

Interprétation physique : circulation d'un champ de vecteurs dérivant d'un potentiel.

Aucun développement sur la différentielle pour l'instant ; le théorème de Poincaré est hors programme. Seule est au programme la formule ci-dessus qui permet de poser des exercices sur la détermination de valeurs de certaines intégrales généralisées à l'aide du calcul de l'intégrale curviligne d'une forme différentielle exacte sur un arc fermé (ie 0 !).

- f) Passage à la limite sous l'intégrale

Théorème de convergence dominée : soit (f_n) une suite de fonctions continues par morceaux de I dans $\mathbb{K}$ convergeant simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux et telle qu'il existe une fonction φ positive intégrable sur I vérifiant $|f_n| \leqslant \varphi$ pour tout n. Alors :

$$\int_I f_n \longrightarrow \int_I f.$$

Démonstration hors programme.

L'hypothèse de continuité par morceaux de f, imposée par les limitations du programme, n'a pas l'importance de l'hypothèse de domination.

Extension au cas d'une famille à paramètre réel $(f_\lambda)_{\lambda \in J}$ où J est un intervalle de $\mathbb{R}$.

- g) Continuité d'une intégrale à paramètre

Soit A une partie d'un espace normé de dimension finie, I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur $A \times I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que f est continue par rapport à la première variable, continue par morceaux par rapport à la seconde variable. On suppose de plus qu'il existe une fonction φ positive intégrable sur I telle que, pour tout x de A, $|f(x, .)| \leqslant \varphi$. Alors

$$g : x \mapsto \int_I f(x,t)dt$$

est définie et continue sur A. L'hypothèse de continuité par morceaux, imposée par les limitations du programme, n'a pas l'importance de l'hypothèse de domination.

Extension au cas où l'hypothèse de domination est satisfaite au voisinage d'un point a de A. Si A est un intervalle de $\mathbb{R}$, extension au cas où l'hypothèse de domination est satisfaite sur tout segment de A.

Deuxième semaine.

Intégrales généralisées : tout le programme précédent plus

- h) Dérivation d'une intégrale à paramètre
Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur $J \times I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que f est continue par morceaux par rapport à la seconde variable, que, pour tout x de J, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I, que $\frac{\partial f}{\partial x}$ est définie sur $J \times I$, continue par rapport à la première variable, continue par morceaux par rapport à la seconde variable. On suppose de plus qu'il existe une fonction φ positive intégrable sur I telle que, pour tout x de J, $|\frac{\partial f}{\partial x}(x,.)| \leqslant \varphi$. Alors

$$g : x \mapsto \int_I f(x,t)dt$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J et vérifie :

$$\forall x \in J, \qquad g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\ dt.$$

Extension au cas où l'hypothèse de domination est satisfaite sur tout segment de J.
Classe $\mathcal{C}^k$ d'une intégrale à paramètre, sous hypothèse d'intégrabilité de $\frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,.)$ pour tout x de J si $0 \leqslant j \leqslant k-1$ et domination sur tout segment de $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,.)$.
Exemples d'étude de fonctions définies comme intégrales : régularité, étude asymptotique.
- Intégration des relations de comparaison
Intégration des relations de comparaison : domination, négligeabilité, équivalence. La fonction de référence est positive.

Série de fonctions

Convergence simple, convergence uniforme. Convergence uniforme sur tout segment de I. Ces notions sont définies via la suite des sommes partielles.
Une série de fonctions converge uniformément si et seulement si elle converge simplement et la suite de ses restes converge uniformément vers 0.
Convergence normale d'une série de fonctions. La convergence normale implique la convergence uniforme et la convergence absolue en tout point.
Continuité de la fonction somme.
Théorème de la double limite
Intégration sur un segment.
Dérivation. Extension aux séries de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.
Les étudiants doivent savoir étudier la somme d'une série de fonctions (régularité, étude asymptotique, utilisation de la comparaison série-intégrale).
Théorème d'intégration terme à terme :
Si (f_n) est une suite de fonctions continues par morceaux et intégrables sur I, telle que la série $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I et telle que la série $\sum \int_I |f_n(t)|dt$ converge, alors f est intégrable sur I et

$$\int_I f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I f_n(t)dt.$$

Démonstration hors programme.
L'hypothèse de continuité par morceaux de la somme, imposée par les limitations du programme, n'a pas l'importance de l'hypothèse de convergence de $\sum \int_I |f_n|$.

\- **Arcs paramétrés : à confirmer**

Arc paramétré de classe $\mathcal{C}^1$ à valeurs dans E. Paramètre régulier. (Interprétation géométrique de la dérivée : tangente en un point associé à un paramètre régulier).
Exemples simples d'arcs paramétrés plans. Les étudiants doivent savoir déterminer la tangente et la normale à un arc paramétré plan en un point associé à un paramètre régulier.
L'étude des points stationnaires, des courbes asymptotes et des arcs définis par une équation polaire est hors programme.
La pratique du tracé des arcs paramétrés n'est pas un objectif du programme. Réalisation de tracés à l'aide de l'outil informatique.

Prévision : Séries entières