

*Première semaine.***Structures algébriques usuelles (2)***- e) Anneaux*

Anneau. Produit fini d'anneaux. Les anneaux sont unitaires.

Sous-anneaux. Morphisme d'anneaux. Image et noyau d'un morphisme. Isomorphisme d'anneaux.

Anneau intègre. Corps. Sous-corps. Les corps sont commutatifs.

Arithmétique*- f) Idéaux d'un anneau commutatif*

Idéal d'un anneau commutatif. Le noyau d'un morphisme d'anneaux est un idéal.

Relation de divisibilité dans un anneau commutatif intègre. Interprétation de la divisibilité en termes d'idéaux.

Idéaux de \mathbb{Z} .

- g) L'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. L'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps si et seulement si n est premier.

Théorème chinois : si m et n sont deux entiers premiers entre eux, isomorphisme naturel de $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Application aux systèmes de congruences.

Indicatrice d'Euler φ . Calcul de $\varphi(n)$ à l'aide de la décomposition de n en facteurs premiers. Calcul de $\varphi(n)$ à l'aide d'une méthode de crible.

Théorème d'Euler. Lien avec le petit théorème de Fermat étudié en première année.

codage RSA.

- h) Anneaux de polynômes à une indéterminée

Dans ce paragraphe, K est un sous-corps de \mathbb{C} .

Idéaux de $K[X]$.

PGCD de deux polynômes. Par convention, le PGCD est unitaire.

Extension au cas d'une famille finie.

Relation de Bézout. Lemme de Gauss. En relation avec I : algorithme d'Euclide étendu sur les polynômes, recherche simultanée du PGCD et des coefficients de Bézout.

Irréductible de $K[X]$. Existence et unicité de la décomposition en facteurs irréductibles. Les étudiants doivent connaître les irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$.

L'étude des polynômes sur un corps fini est hors programme.

- i) Algèbres

Algèbre. Les algèbres sont unitaires.

Exemples : $\mathbb{K}[X]$, $\mathcal{L}(E)$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$.

Sous-algèbre.

Morphisme d'algèbres.

*Deuxième semaine.***Algèbre linéaire (1)**

Révision de première année : espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels, applications linéaires, sous-espaces vectoriels supplémentaires et projecteurs ; espaces vectoriels de dimension finie (bases, dimension, rang, calcul matriciel) ;

Somme et somme directe de n sevs ; trace.

Prévision : algèbre linéaire (2) déterminants, systèmes, réduction